

Четвёртый тур 01.12.2024. Вторая лига. Третья лига, бой за первое место.

1. Напомним, что большой окружностью на сфере называется окружность, полученная сечением сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. На сфере провели несколько больших окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. В результате сфера разбилась на сферические треугольники и четырехугольники, причем есть хотя бы один четырехугольник. Найдите количество треугольников и количество четырехугольников разбиения. Приведите все ответы и докажете, что других нет.

2. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{1^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{2^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{3^3}} \right\rfloor + \dots = \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{1^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{2^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{3^2}} \right\rfloor + \dots$$

3. Найдите все вещественные числа a такие, что существует функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x+y) + xf(f(y)) = f(f(x)) + f(y) + axy$$

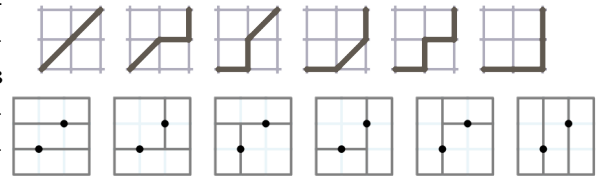
для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Пусть n, k — натуральные числа. Назовем число N *хорошим*, если среди некоторых 2024 последовательных $2n$ -х степеней встречается ровно k остатков от деления на N . При каких k и n количество хороших чисел бесконечно?

5. Дима и Саша занимаются двумя на первый взгляд совершенно разными делами. У Димы есть фигура «хромой король» — она умеет ходить на 1 клетку вверх или вправо, а также на 1 клетку по диагонали вправо-вверх. Пусть A — количество путей хромого короля по доске $n \times n$ из левого нижнего угла в правый верхний, которые никогда не поднимаются выше главной диагонали.

А у Саши есть бумажный квадрат $n \times n$ и резак, которым он может проводить горизонтальные или вертикальные разрезы «от края до края». Саша отметил $n - 1$ узлов клеток, лежащих внутри квадрата на его главной диагонали, и каждый очередной разрез делает по одному из отмеченных узлов, по которому еще разрез не проводился

(разрез проводится от края до края того куска бумаги, на котором расположен выбранный на данном ходу узел). Пусть B — количество способов так разрезать квадрат (способы отличающиеся только порядком разрезов считаются одинаковыми). Докажите, что $A = B$. На рисунках изображены примеры всевозможных способов при $n = 3$.



6. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. Вписанная окружность касается сторон BC , CA , AB в точках D , E , F соответственно. Прямые BE и CF пересекаются в точке G . Докажите, что существует точка X на описанной окружности треугольника EFG такая, что описанные окружности треугольников BCX и EFG касаются и $\angle BGC = \angle BXC + \angle EDF$.

7. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ такой, что $BD = CD = AC$. Оказалось, что точки B , C , D и E лежат на одной окружности. Докажите, что если $\angle BAC + \angle AED = 180^\circ$ и $\angle DCA = \angle BDE$, то либо $AB = DE$, либо $AB = 2AE$.

8. Вася заказал в интернете n одинаковых колод карт, в каждой из них присутствуют карты 50 различных видов. Ему пришли несколько коробок, в каждой из которых помещается не более 2024 карт. К сожалению, карты в коробках не разложены по колодам, более того, не гарантируется, что каждая колода целиком находится в одной коробке. Докажите, что существует такое N , что если $n > N$, то Вася сможет вывалить содержимое каждой коробки в одну из двух куч так, чтобы каждая куча не оказалась пустой, и в каждой куче было поровну карт каждого вида.

9. Найдите наибольшее натуральное k , для которого числа от 1 до 2^n можно раскрасить в k цветов так, чтобы сумма чисел каждого цвета была степенью двойки.

10. На плоскости даны 4 вектора, сумма длин которых равна 1. При каком наименьшем λ из них гарантированно можно выбрать два вектора \vec{a} и \vec{b} таких, что $|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{a} + \vec{b}| \leq \lambda$?

Четвёртый тур 01.12.2024. Третья лига.

1. Напомним, что большой окружностью на сфере называется окружность, полученная сечением сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. На сфере провели несколько больших окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. В результате сфера разбилась на сферические треугольники и четырехугольники, причем есть хотя бы один четырехугольник. Найдите количество треугольников разбиения. Приведите все ответы и докажите, что других нет.

2. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{1^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{2^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{3^3}} \right\rfloor + \dots = \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{1^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{2^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{3^2}} \right\rfloor + \dots$$

3. Найдите все вещественные числа a такие, что существует функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x+y) + xf(f(y)) = f(f(x)) + f(y) + axy$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Натуральные числа x, y таковы, что $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что $x - y$ является квадратом целого числа.

5. Во всех клетках таблицы $n \times n$ написаны -1 . За одну операцию можно выбрать две соседние строки и два соседних столбца, оставить четыре числа, расположенные на их пересечении, и поменять знак всех остальных чисел, записанных в выбранных строках и столбцах. При каких n можно такими операциями сделать все числа равными 1 ?

6. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Прямые BE и CF пересекаются в точке G . Докажите, что существует точка X на описанной окружности треугольника EFG такая, что описанные окружности треугольников BCX и EFG касаются и $\angle BGC = \angle BXC + \angle EDF$.

7. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ такой, что $BD = CD = AC$. Оказалось, что точки B, C, D и E лежат на одной окружности. Докажите, что если $\angle BAC + \angle AED = 180^\circ$ и $\angle DCA = \angle BDE$, то либо $AB = DE$, либо $AB = 2AE$.

8. Вася заказал в интернете n одинаковых колод карт, в каждой из них присутствуют карты 50 различных видов. Ему пришли несколько коробок, в каждой из которых помещается не более 2024 карт. К сожалению, карты в коробках не разложены по колодам, более того, не гарантируется, что каждая колода целиком находится в одной коробке. Докажите, что существует такое N , что если $n > N$, то Вася сможет вывалить содержимое каждой коробки в одну из двух куч так, чтобы каждая куча не оказалась пустой, и в каждой куче было поровну карт каждого вида.

9. Найдите наибольшее натуральное k , для которого числа от 1 до 2^n можно раскрасить в k цветов так, чтобы сумма чисел каждого цвета была степенью двойки.

10. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \leq 8$. Докажите, что

$$ab + bc + ca \leq 3.$$